

---

---

УДК 622.281.406:539.3

**Шматовский Л.Д.**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.  
**Коломиец А.Н.**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.  
**Зайцев М.С.**  
**Тынына С.В.**  
(ИГТМ НАН Украины)

**РАЗРАБОТКА МЕТОДА РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ  
САМОНАПРЯЖЕНИЯ ТАМПОНАЖНОГО КАМНЯ**

**Шматовський Л.Д.**, канд. техн. наук, ст. наук. співроб.  
**Коломієц О.М.**, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.  
**Зайцев М.С.**  
**Тинина С.В.**  
(ІГТМ НАН України)

**РОЗРОБКА МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ  
САМОНАВАНТАЖЕННЯ ТАМПОНАЖНОГО КАМЕНЮ**

**Shmatovskiy L.D.**, Ph.D. (Tech.), Senior Researcher  
**Kolomiets A.N.**, Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Researcher  
**Zaitsev M.S.**  
**Tynyna S.V.**  
(IGTM NAS of Ukraine)

**METHOD FOR COMPUTING PARAMETERS OF GROUTING ROCK SELF-  
STRESS**

**Аннотация.** Разработан метод и алгоритм определения параметров самонапряжения твердеющего тампонажного раствора, который может рассматриваться как эквивалентная пространственная задача о вдавливании жесткого штампа в торец цилиндрического тела конечных размеров. Сформулированы граничные условия задачи. Определены аналитические соотношения для компонентов тензора напряжений, характеризующих самонапряжение тампонажного камня в зависимости от его физико-механических свойств. Разработана методика решения уравнений равновесия упруго-деформируемого тела в цилиндрической системе координат. Представлены графики расчетов, из которых следует, что разработанная методика позволяет судить о самонапряжении тампонажного камня в данной области за исключением малой окрестности особых точек, где упругое решение имеет особенность.

**Ключевые слова:** метод, алгоритм, тампонажный раствор, самонапряжения, жесткий штамп, уравнения равновесия упруго-деформируемого тела в цилиндрической системе координат.

К оценке самонапряжения тампонажного камня при его расширении в ограниченном пространстве можно подойти путем решения эквивалентной задачи о вдавливании жесткого штампа в поверхность затвердевшего тампонажного раствора.

Для решения этой задачи достаточно знать величину свободного линейного расширения тампонажного камня в направлении соответствующей координатной оси, его модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Таким образом, для разработки метода и алгоритма определения параметров самонапряжения твердеющего тампонажного раствора может рассматриваться эквивалентная пространственная задача о вдавливании жесткого штампа в торец цилиндрического тела конечных размеров. Величина перемещения штампа равна численным значениям линейного и условного объемного расширения тампонажного камня, полученных в результате экспериментальных исследований.

Рассмотрим напряжения, возникающие в цилиндрическом теле из тампонажного камня  $0 \leq \bar{r} \leq a$ ;  $0 \leq \bar{z} \leq h$ .

Будем предполагать, что тело тампонажного камня деформируется в результате действия на него абсолютно жесткого тела вращения цилиндрической формы (поршня), причем ось вращения этого тела совпадает с осью  $Z$  координатной системы (рис.1).

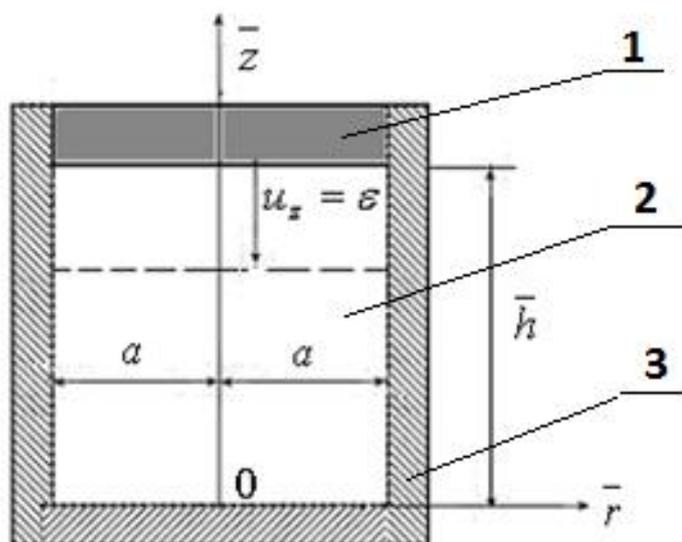


Рис. 1 – Схема к решению задачи о самонапряжении тампонажного камня  
1 - поршень, 2 - тампонажный камень, 3 – цилиндрический стакан

Физико-механические свойства затвердевшего тампонажного камня будем характеризовать соотношениями линейно-упругого деформируемого тела.

Чтобы сформулировать граничные условия задачи, будем считать, что в области  $r \leq a$  задана  $z$ -компонента смещения точек поверхности  $\bar{z} = \bar{h}$ , а при  $\bar{r} = a$  радиальная компонента смещения  $U_r = 0$ . Кроме того, предположим, что касательное напряжение  $\sigma_{rz}$  отсутствует во всех точках границы тела.

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$U_z = \xi; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad z = h; \quad 0 \leq r \leq a; \quad (1)$$

$$U_r = 0; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad 0 \leq z \leq h; \quad r = a; \quad (2)$$

$$U_z = 0; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad z = 0; \quad 0 \leq r \leq a, \quad (3)$$

где  $\xi$  - величина линейного расширения камня на 28 сутки после затвердения тампонажного раствора, которая определяется экспериментально.

Задача состоит в определении аналитических соотношений для компонент тензора напряжений, характеризующих самонапряжение тампонажного камня в зависимости от его физико-механических свойств.

Уравнения равновесия упруго-деформируемого тела представим в таком виде [1]:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \bar{\beta}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U_r + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r + (1-2\nu) \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \bar{\beta}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U_z = 0,$$

где  $r$  и  $z$  - безразмерные координаты,  $r = ra^{-1}$ ;  $z = \bar{z}a^{-1}$ ;  $h = \bar{h}a^{-1}$ ;  $a$  - радиус цилиндрической полости;  $U_r$  и  $U_z$  - перемещения соответственно в направлениях  $\bar{r}$  и  $\bar{z}$ ;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $E$  - модуль Юнга, а константы  $\bar{\beta}_{1,2}$  имеют вид

$$\bar{\beta}_2^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cdot \bar{\beta}_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};$$

Следует отметить, что в замкнутом виде решение задач, аналогичных сформулированной выше, получено лишь для полубесконечного цилиндра [2, 3]. Основная сложность задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндра конечных размеров состоит в том, что при использовании известных решений уравнений равновесия [1] в цилиндрической системе координат нет возможности непосредственно удовлетворять условиям на боковой поверхности и торцах цилиндра.

Поэтому, для реализации сформулированной выше проблемы необходимо в первую очередь провести комплекс теоретических исследований по разработке методики решения уравнений равновесия упруго-деформируемого тела в цилиндрической системе координат с тем, чтобы в процессе исследования поля напряжений использовать уже известные способы решения граничных задач механики упруго-деформируемого твердого тела.

Известные общие решения уравнений динамического равновесия в цилиндрической системе координат, где компоненты вектора упругих смещений выражаются через функции, удовлетворяющие уравнениям равновесия [1], не обеспечивают необходимый функциональный произвол для удовлетворения граничных условий на боковой поверхности (2) и торцах цилиндрического тела (1) и (3).

В связи с этим необходимо разработать подходы к решению уравнений равновесия (4) в форме, позволяющей строго удовлетворять краевым условиям на боковой поверхности  $\bar{r} = a$  и на торцах  $z = 0, h$  цилиндрического тела.

Решение системы уравнений (3, 4) будем искать в форме:

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{b - \lambda c}{1 - \lambda b} \frac{\partial \psi}{\partial z}; U_z = \left[ \frac{a - c}{1 - \lambda} + 2(1 - \nu) \frac{b}{1 - \lambda b} \right] \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (5)$$

где  $\varphi(r, z)$  и  $\psi(r, z)$  - некоторые функции;  $\lambda, a, b, c$  - произвольные постоянные.

Подставив выражения (5) в уравнения (4) и после выкладок, аналогичных с проведенными в работе [4,] находим:

$$U_r = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[ A_1(\alpha) U_r^{(1)} + A_2(\alpha) U_r^{(2)} + A_3(\alpha) U_r^{(3)} - A_4(\alpha) U_r^{(4)} \right] \cos \alpha z - \left[ B_1(\alpha) U_r^{(1)} - B_2(\alpha) U_r^{(2)} + B_3(\alpha) U_r^{(3)} + B_4(\alpha) U_r^{(4)} \right] \sin \alpha z \right\} d\alpha; \quad (6)$$

$$U_r = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[ A_1(\alpha) U_r^{(1)} - A_2(\alpha) U_r^{(2)} + A_3(\alpha) U_r^{(3)} - A_4(\alpha) U_r^{(4)} \right] \sin \alpha z + \left[ B_1(\alpha) U_r^{(1)} + B_2(\alpha) U_r^{(2)} + B_3(\alpha) U_r^{(3)} + B_4(\alpha) U_r^{(4)} \right] \cos \alpha z \right\} d\alpha;$$

где обозначено  $A_n(\alpha)$  и  $B_n(\alpha)$ , ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) - произвольные функции аргумента  $\alpha$ .

$$U_r^{(1)} = \omega_3 J_1(\alpha \beta_1 r); U_r^{(2)} = \omega_4 J_1(\alpha \beta_2 r);$$

$$U_r^{(3)} = \alpha \beta_3 J_1(\alpha \beta_3 r); U_r^{(4)} = \alpha (b - \lambda c) (1 - \lambda b)^{-1} J_1(\alpha \beta_3 r);$$

$$U_z^{(1)} = \omega_5 J_0(\alpha \beta_1 r); U_z^{(2)} = \omega_6 J_0(\alpha \beta_2 r);$$

$$U_z^{(3)} = \alpha J_0(\alpha \beta_3 r); U_z^{(4)} = \alpha \beta_3 \omega_7 J_0(\alpha \beta_3 r); \omega_7 = \omega_2(1-2\nu)^{-1}.$$

Аналитические зависимости для компонент тензора напряжений получаем, воспользовавшись соотношениями закона Гука [1].

Таким образом, полученные зависимости для компонент вектора перемещений (16) и тензора напряжений имеют достаточный функциональный произвол для удовлетворения краевых условий (1)-(3). Следует отметить, что наличие в формулах (6) произвольных постоянных  $\lambda$  и  $b$  дает возможность использования при удовлетворении краевых условий принципа суперпозиции.

Для удовлетворения краевых условий (1) - (3) на торцах и боковой поверхности цилиндрического тела воспользуемся принципом суперпозиции. Полагая в формулах (6)  $\lambda = \lambda_n$  и  $b = b_n$  ( $n=1,2$ ) и учитывая условия на торцах цилиндра  $z=0$ , аналитические зависимости для компонент вектора перемещений и тензора напряжений представим в такой форме:

$$U_r = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_{1n}(\alpha) U_r^{(1n)} + A_{2n}(\alpha) U_r^{(2n)} + A_{3n}(\alpha) U_r^{(3n)} - A_{4n}(\alpha) U_r^{(4n)} \right] \cos \alpha z \right\} d\alpha; \quad (7)$$

$$U_z = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_{1n}(\alpha) U_z^{(1n)} - A_{2n}(\alpha) U_z^{(2n)} + A_{3n}(\alpha) U_z^{(3n)} - A_{4n}(\alpha) U_z^{(4n)} \right] \sin \alpha z \right\} d\alpha,$$

где обозначено

$A_{mn}(\alpha)$  ( $m,n=1,2,3,4$ ) – произвольные функции аргумента  $\alpha$ .

$$U_r^{(1n)} = \omega_{3n} J_1(\alpha \beta_1 r); U_r^{(2n)} = \omega_{4n} J_1(\alpha \beta_2 r); U_r^{(3n)} = \alpha \beta_{3n} J_1(\alpha \beta_{3n} r);$$

$$U_r^{(4n)} = \alpha (b_n - \lambda_n C_n) (1 - \lambda_n b_n)^{-1} J_1(\alpha \beta_{3n} r); U_z^{(1n)} = \omega_{5n} J_0(\alpha \beta_1 r);$$

$$U_z^{(2n)} = \omega_{6n} J_0(\alpha \beta_2 r);$$

$$U_z^{(3n)} = \alpha J_0(\alpha \beta_{3n} r); U_z^{(4n)} = \alpha \beta_{3n} \omega_{7n} J_0(\alpha \beta_{3n} r);$$

$$\omega_{1n} = \frac{a_n - c_n}{2(1-\nu)(1-\lambda_n a)} + \frac{\lambda_n c_n}{1-\lambda_n b_n}; \omega_{2n} = (1-2\nu) \left[ \frac{a_n - c_n}{1-\lambda} + 2(1-\nu) \frac{b_n}{1-\lambda_n b_n} \right];$$

$$\beta_{3n}^2 = 2\nu \omega_{1n} / \omega_{2n}; \omega_{3n} = \left( \beta_1^2 \omega_{2n} + 2\nu \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1-\lambda_n b_n} \right) \left[ \omega_{2n} \left( \beta_{3n}^2 - \beta_1^2 \right) \right]^{-1};$$

$$\omega_{7n} = \omega_{2n}(1-2\nu)^{-1};$$

$$\omega_{4n} = \beta_2 \left[ 1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1} \right] (\beta_{3n}^2 - \beta_2^2)^{-1};$$

$$\omega_{5n} = \beta_1 \left[ 1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1} \right] (\beta_{3n}^2 - \beta_1^2)^{-1};$$

$$\omega_{6n} = \left( \omega_{1n} + \frac{b_n - \lambda c_n}{1 - \lambda b_n} \right) \left[ \omega_{2n} (\beta_{3n}^2 - \beta_1^2) \right]^{-1}.$$

Аналитические зависимости для компонент тензора напряжений в этом случае запишем в таком виде:

$$\sigma_{rr} = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_0^\infty \left\{ \left[ A_{1n}(\alpha)\sigma_{rr}^{(1n)} + A_{2n}(\alpha)\sigma_{rr}^{(2n)} + A_{3n}(\alpha)\sigma_{rr}^{(3n)} - A_{4n}(\alpha)\sigma_{rr}^{(4n)} \right] \cos \alpha z \right\} d\alpha;$$

$$\sigma_{rr}^{(1n)} = \frac{\omega_{3n}}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_1 r) - \alpha(\beta_1\omega_{3n} - \frac{\nu}{1-\nu}\omega_{5n})J_0(\alpha\beta_1 r);$$

$$\sigma_{rr}^{(2n)} = \frac{\omega_{4n}}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_2 r) - \alpha(\beta_2\omega_{4n} + \frac{\nu}{1-\nu}\omega_{6n})J_0(\alpha\beta_2 r);$$

$$\sigma_{rr}^{(3n)} = \frac{\alpha\beta_{3n}}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_{3n} r) - \alpha^2(\beta_{3n}^2 - \frac{\nu}{1-\nu})J_0(\alpha\beta_{3n} r);$$

$$\sigma_{rr}^{(4n)} = \frac{\alpha}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1 - \lambda_n b_n} J_1(\alpha\beta_{3n} r) + \alpha^2 \beta_{3n} (\omega_{7n} - \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1 - \lambda_n b_n}) J_0(\alpha\beta_{3n} r);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{q_0}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_0^\infty \left\{ \left[ A_{1n}(\alpha)\sigma_{\theta\theta}^{(1n)} + A_{2n}(\alpha)\sigma_{\theta\theta}^{(2n)} + A_{3n}(\alpha)\sigma_{\theta\theta}^{(3n)} + A_{4n}(\alpha)\sigma_{\theta\theta}^{(4n)} \right] \cos \alpha z \right\} d\alpha;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1n)} = \frac{\omega_{3n}}{r} \frac{1}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_1 r) + \alpha(\beta_1\omega_{3n} - \omega_{5n}) \frac{\nu}{1-\nu} J_0(\alpha\beta_1 r); \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2n)} = \frac{\omega_{4n}}{r} \frac{1}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_2 r) + \alpha(\beta_2\omega_{4n} + \omega_{6n}) \frac{\nu}{1-\nu} J_0(\alpha\beta_2 r);$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3n)} = \alpha \left[ \frac{\beta_{3n}}{r} \frac{1}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_{3n} r) + \frac{\alpha\nu}{1-\nu} (\beta_{3n}^2 - 1) J_0(\alpha\beta_{3n} r) \right];$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(4n)} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1 - \lambda_n b_n} \frac{1}{1 - \nu} J_1(\alpha \beta_{3n} r) - \alpha \beta_{3n} \frac{\nu}{\nu - 1} (\omega_{7n} - \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1 - \lambda_n b_n} J_0(\alpha \beta_{3n} r)) \right];$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{q_0}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_{1n}(\alpha) \sigma_{zz}^{(1n)} + A_{2n}(\alpha) \sigma_{zz}^{(2n)} + A_{3n}(\alpha) \sigma_{zz}^{(3n)} + A_{4n}(\alpha) \sigma_{zz}^{(4n)} \right] \cos \alpha z \right\} d\alpha;$$

$$\sigma_{zz}^{(1n)} = \left[ \frac{\nu}{1 - \nu} \beta_1 \omega_{3n} - \omega_{5n} \right] J_0(\alpha \beta_1 r); \quad \sigma_{zz}^{(2n)} = \left[ \frac{1}{1 - \nu} \beta_2 \omega_{4n} + \omega_{6n} \right] J_0(\alpha \beta_2 r);$$

$$\sigma_{zz}^{(3n)} = \alpha \left[ \frac{1}{1 - \nu} \beta_{3n}^2 - 1 \right] J_0(\alpha \beta_{3n} r); \quad \sigma_{zz}^{(4n)} = \alpha \beta_{3n} \left[ \omega_{7n} - \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1 - \lambda_n b_n} \right] J_0(\alpha \beta_{3n} r);$$

$$\sigma_{rz} = \frac{q_1}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \left[ A_{1n}(\alpha) \sigma_{rz}^{(1n)} + A_{2n}(\alpha) \sigma_{rz}^{(2n)} - A_{4n}(\alpha) \sigma_{rz}^{(4n)} \right] \sin \alpha z \right\} d\alpha;$$

$$\sigma_{rz}^{(1n)} = (\omega_{3n} - \beta_1 \omega_{5n}) J_1(\alpha \beta_1 r); \quad \sigma_{rz}^{(2n)} = (\omega_{4n} + \beta_2 \omega_{6n}) J_1(\alpha \beta_2 r);$$

$$\sigma_{rz}^{(4n)} = \alpha \left[ \frac{b_n - \lambda_n C_n}{1 - \lambda_n b_n} - \beta_{3n}^2 \omega_{7n} \right] J_1(\alpha \beta_{3n} r).$$

Отметим, что  $\lambda_n$  и  $b_n$  ( $n=1,2$ ) подбираются таким образом, что  $\beta_{31} = \beta_{32} = \beta_3$ .

Принимая во внимание волновой характер функций Бесселя первого рода и произвол в выборе функций  $A_{jn}(\alpha)$  ( $j=1,2,3,4$ ), положим

$$A_{1n}(\alpha) = \kappa_1 C_n(\alpha) + \kappa_2 B_n(\alpha) + D_n(\alpha);$$

$$A_{2n}(\alpha) = \kappa_3 C_n(\alpha) + \kappa_1 B_n(\alpha) + A_n(\alpha);$$

$$A_{3n}(\alpha) = \alpha^{-1} (\kappa_3 C_n(\alpha) + \kappa_2 B_n(\alpha) + D_n(\alpha));$$

$$A_{4n}(\alpha) = \alpha^{-1} (\kappa_2 C_n(\alpha) + \kappa_3 B_n(\alpha) + A_n(\alpha)) \quad (20)$$

где  $C_n(\alpha)$  и  $B_n(\alpha)$ ,  $A_n(\alpha)$  и  $D_n(\alpha)$  - вспомогательные функции аргумента  $\alpha$ , а  $\kappa_m$  - ( $m=1,2,3$ ) - произвольные константы.

Подставляя выражения (10) в формулы для компонент вектора перемещений (7) и тензора напряжений (8), а затем внося полученные выражения в условия

(1) - (3), в результате несложных, но громоздких преобразований приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} \alpha \{ \tau_{rz}^{(11)} Q_1(\alpha) J_1(\alpha \beta_1 r) - \tau_{rz}^{(21)} Q_2(\alpha) J_1(\alpha \beta_2 r) - \tau_{rz}^{(41)} Q_3(\alpha) J_1(\alpha \beta_3 r) \} \sin \alpha h d\alpha = 0 ; \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} \{ \Delta_{65} D_1(\alpha) J_0(\alpha \beta_3 r) - [ D_1(\alpha) \gamma_{16} + Q_1(\alpha) \gamma_{21} + Q_2(\alpha) \gamma_{22} + Q_3(\alpha) \gamma_{23} ] J_0(\alpha \beta_2 r) - [ D_1(\alpha) \gamma_{24} + Q_1(\alpha) \gamma_{25} + Q_2(\alpha) \gamma_{26} + Q_3(\alpha) \gamma_{31} ] J_0(\alpha \beta_1 r) \} \sin \alpha h d\alpha = -\pi \varepsilon ,$$

Выражение коэффициентов  $\gamma_{ij}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3$ ) из-за их громоздкости здесь не приводим.

Решение интегральных уравнений (10) ищем в виде:

$$Q_{\kappa}(\alpha) = (\alpha)^{-1} \int_0^1 \chi(\xi) J_1[\alpha f_{\kappa}(\xi)] d\xi, \quad (\kappa = 1,2,3);$$

$$D_1(\alpha) = (\Delta_{65})^{-1} \int_0^1 \chi(\xi) \sin[\alpha(\beta_3 \xi - h)] d\xi, \quad (11)$$

$$f_{\kappa}(\xi) = \xi + h\beta_{\kappa}, \quad (\kappa = 1,2,3).$$

Для законности последующих операций нужно предположить, что  $\chi(\xi)$  непрерывная и дифференцируемая функция на сегменте  $[0, 1]$ .

Отправляясь от следующих свойств функций Бесселя [6]:

$$\int_0^{\infty} \alpha^{\nu-\mu} J_{\nu}(\alpha a) J_{\mu}(\alpha b) \sin \alpha y d\alpha = 0, \quad y < b - a ; \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha a) \cos(\alpha y) d\alpha = \begin{cases} (a^2 - y^2)^{-1/2}, & y < a; \\ 0, & y > a; \end{cases}$$

легко убедиться, что первое уравнение (10) тождественно удовлетворяется для любой непрерывной функции  $\chi(\xi)$ .

Второе уравнение (10) может быть приведено к виду:

$$\int_0^r \frac{\chi(\xi) d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = F(r), \quad (13)$$

$$F(r) = \int_0^{\infty} \left\{ \left[ D_1(\alpha)\gamma_{16} + Q_1(\alpha)\gamma_{21} + Q_2(\alpha)\gamma_{22} + Q_3(\alpha)\gamma_{23} \right] J_0(\alpha\beta_2 r) + \right. \\ \left. + \left[ D_1(\alpha)\gamma_{24} + Q_1(\alpha)\gamma_{25} + Q_2(\alpha)\gamma_{26} + Q_3(\alpha)\gamma_{31} \right] J_0(\alpha\beta_1 r) \right\} d\alpha + \pi\varepsilon.$$

Заменим теперь в выражении  $F(r)$  функцию  $J_0(\alpha\beta_\kappa r)$  ( $\kappa=1,2,3$ ) интегралом:

$$J_0(\alpha\beta_\kappa r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\cos(\alpha\beta_\kappa \xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi.$$

После перестановки порядка интегрирования и переноса в левую часть уравнения (13) всех интегралов, где интегрирование производится по переменной  $\alpha$ , приведем это уравнение к виду

$$\int_0^r \frac{U(\xi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = 2\pi\varepsilon.$$

Последнее уравнение подстановкой  $\xi = r\sin\theta$  преобразуется к уравнению Шлемильха [6], решение которого в данном случае имеет вид:

$$U(r) = 4\varepsilon. \quad (14)$$

Подставляя сюда выражение  $U(r)$  и полагая  $\kappa_n = \lambda_n \nu$  ( $n=1,2,3$ ) ( $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\lambda_n - const$ ,  $\lambda_n < 1$ ), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, зависящее от малого параметра  $\lambda = \nu\beta_3$ :

$$\chi(\xi) - \lambda \int_0^1 \chi(\xi) K(\alpha, r, \xi) d\xi = 4\beta_3 \varepsilon, \quad (15)$$

Решение интегрального уравнения (18) находится по методу последовательных приближений [7].

Формула, позволяющая выразить любое приближение через свободный член  $\pi\beta_3\varepsilon$  и интегрированные ядра в данном случае может быть представлена в таком виде

$$\chi_k(\xi) = 4\beta_3\varepsilon + \sum_{n=1}^k \lambda^n \int_0^1 K(r, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (30)$$

$$f(\xi) = \chi_{r-1}(\xi)$$

Таким образом, поставленная задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода и последующему вычислению несобственных интегралов в формулах (7) и (8).

По приведенным выше выражениям для параметров напряженно состояния выполнен расчет распределения давления расширяющегося тампонажного раствора на поршень и стенки цилиндрического стакана.

Результаты расчета представлены на рис. 2.

На рис. 2 а показано распределение относительного давления  $\sigma_z^* = \sigma_z \frac{a}{\varepsilon E}$ , в основании жесткого штампа, а на рис. 2 б - распределение относительного давления  $\sigma_r^* = \sigma_r \frac{a}{\varepsilon E}$  на стенки цилиндрического стакана.

Из представленных на рис. 2 графиков следует, что разработанная методика позволяет судить о самонапряжении тампонажного камня в данной области за исключением малой окрестности особых точек ( $z=h$ ;  $r=a$ ), где упругое решение имеет особенность.

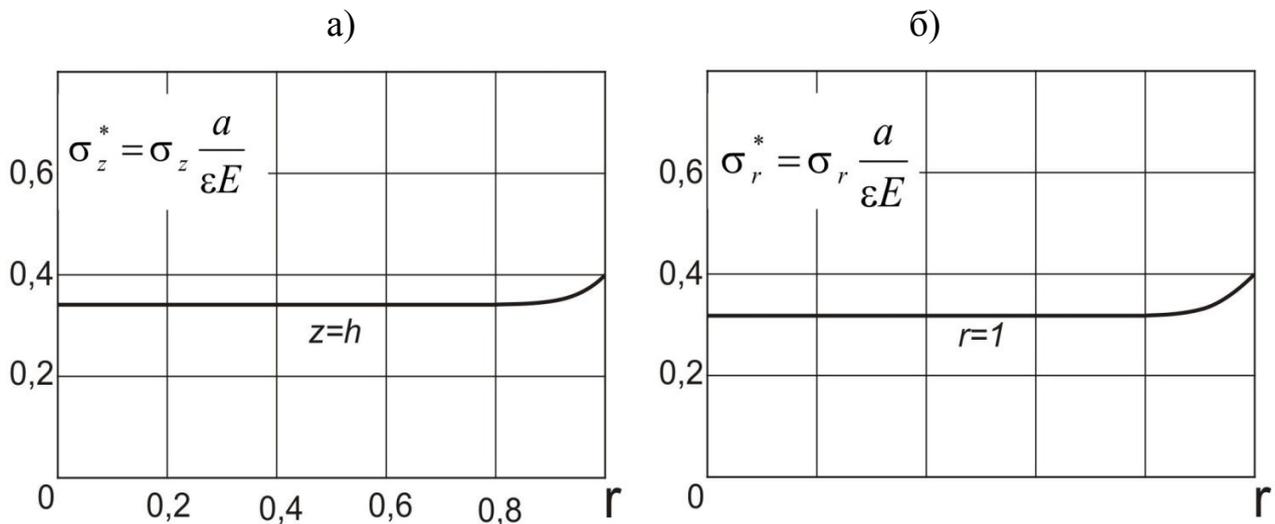


Рис. 2 – Распределение давления тампонажного камня:  
а) на поршень; б) на стенки цилиндрического стакана

Отметим, что для вычисления величины самонапряжения тампонажного камня необходимо экспериментальным путем определить коэффициент Пуассона  $\nu$ , модуль Юнга  $E$  и величину свободного линейного расширения  $\varepsilon$ .

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв, А. Математическая теория упругости / А.Ляв. – М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
2. Кузьмин, Ю.Н. Внешняя задача Дирихле для полубесконечного цилиндра / Ю.Н. Кузьмин // Прикл. матем. и мех. – 1969. – т. 33, №3. – С. 287 – 290.
3. Бородачев, Н.М. О вдавлении штампа в торец полубесконечного цилиндра / Н.М. Бородачев // Прикл. матем. и мех. – 1967. – т. 3, №9. – С.83-89.
4. Перепелица, В.Г. Особенности напряженного состояния горного массива в процессе проведения выработки / В.Г. Перепелица, А.Н. Коломиец, Л.Д. Шматовский //Доповіди НАН України. – 2012. - № 5. –С. 57-61.
5. Кошляков, Н.С. Уравнение в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. - 708 с.
6. Ватсон, Г.Н. Теория Бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 798 с.
7. Забрейко, П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев [и др.] – М.: Наука, 1968. – 448 с.

## REFERENCES

1. Lyav, A. (1935), *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematic theory of elasticity], DSTI NKTP, Moscow – Leningrad, USSR.
2. Kuzmin, N. (1969), “The exterior Dirichlet problem for a semi-infinite cylinder”, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 33, no 3, pp. 287 – 290.
3. Borodachev, N.M. (1967), “About a stamp into the end of a semi-infinite cylinder”, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 3, no. 9, pp.83-89.
4. Perepelitsa, V.G., Kolomiets, A.N. and Shmatovsky, L.D. (2012), “Features stress state in the rock mass in the process of event generation”, *Dopovidi NAN Ukrainy*, vol. 5, pp. 57-61.
5. Koshliakov, N.S., Gleaner, E.B. and Smirnov, M.M. (1970), *Uravnenie v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki* [The partial differential equation of mathematical physics], Vysshaya shkola, Moscow, USSR.
6. Watson, G.N. (1949), *Teoriya Bessel'nykh funktsiy* [Theory of Bessel functions], Izdatel'stvo inostrannoy literatury, Moscow, USSR.
7. Zabreiko, P.P., Koshelev A.I. and others (1968) *Integral'nye uravneniya* [Integral Equations], Nauka, Moscow, USSR.

---

## Об авторах

**Шматовский Леонид Дмитриевич**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник отдела Механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепрпетровск, Украина, otd-8-11@mail.ru.

**Коломиец Александр Николаевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник отдела Механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепрпетровск, Украина, otd-8-11@mail.ru.

**Зайцев Максим Станиславович**, младший научный сотрудник отдела Механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепрпетровск, Украина, otd-8-11@mail.ru.

**Тынына Сергей Владимирович**, младший научный сотрудник отдела Механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепрпетровск, Украина, otd-8-11@mail.ru.

## About the authors

**Shmatovsky Leonid Dmitrievich**, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Senior Researcher at the Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, otd-8-11@mail.ru.

**Kolomiets Alexander Nikolaevich**, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Senior Researcher at the Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk,

Ukraine, otd-8-11@mail.ru.

**Zaitsev Maxim Stanislavovich**, Junior Researcher at the Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, otd-8-11@mail.ru.

**Tynyna Sergey Vladimirovich**, Junior Researcher at the Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, otd-8-11@mail.ru.

---

**Анотація.** Розроблено метод та алгоритм визначення параметрів самонапруження тверднучого тампонажного розчину, який може розглядатися як еквівалентна просторова задача про вдавлювання жорсткого штампа в торець циліндричного тіла кінцевої довжини. Сформульовані граничні умови задачі. Визначено аналітичні співвідношення для компонентів тензора напружень, що характеризують самонапруження тампонажного каменю залежно від його фізико-механічних властивостей. Розроблена методика рішення рівнянь рівноваги пружньо-деформованого тіла в циліндричній системі координат. Представлені графіки розрахунків, з яких випливає, що розроблена методика дозволяє судити про самонапруження тампонажного каменю в даній області за винятком малої області особливих точок, де пружнє рішення має особливість.

**Ключові слова:** метод, алгоритм, тампонажний розчин, самонапруження, рівняння рівноваги пружньо-деформованого тіла в циліндричній системі координат.

**Abstract.** A method and an algorithm are designed to determine self-stress parameters for hardening grouting mortar. The method can be considered as an equivalent to a spatial problem of rigid punch pressing into cylindrical body end of finite size. Boundary conditions of the problem are formulated. Analytical relations between components of the stress tensor are defined which describe the grouting rock self-stress depending on the rock physical and mechanical properties. A method was created to solve equilibrium equations for elastodeformed bodies in cylindrical coordinate system. Various calculations are presented, which indicate that the designed method allows to define grouting rock self-stress in a concrete area except for specific points which are located in close proximity and require special solutions for the rigidity.

**Keywords:** method, algorithm, plugging solution, self-stress, the equilibrium equations of elastic-deformable body in a cylindrical coordinate system.

*Статья поступила в редакцию 24.09.2013  
Рекомендовано к публикации д.т.н., проф. С.П. Минеевым*

